Convergence d'une suite

Définition

Soient $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels et* l *un nombre réel. On dit que* $(u_n)_n$ *est tend (ou converge) vers* l *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Convergence d'une suite

Définition

Soient $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels et* l *un nombre réel. On dit que* $(u_n)_n$ *est tend (ou converge) vers* l *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

On dit que l *est la limite de* $(u_n)_n$ *et on note*

$l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ *ou* $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$

Une suite qui admet une limite est dite CONVERGENTE.

Une suite qui ne converge pas est dite DIVERGENTE.



Divergence d'une suite

Définition

Soit (u_n) *une suite de réels.*

- *On dit que* (u_n) *tend (diverge) vers* $+\infty$ *si*
  $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 , \quad u_n \geqslant A .$

Divergence d'une suite

Définition

Soit (u_n) *une suite de réels.*

- *On dit que* (u_n) *tend (diverge) vers* $+\infty$ *si*
  $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0\ , \quad u_n \geqslant A\ .$
- *On dit que* (u_n) *tend (diverge) vers* $-\infty$ *si*
  $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0\ , \quad u_n \leqslant A\ .$

Divergence d'une suite

Exemple

Suites arithmétiques : $(u_n) = (u_0 + an)$
Si $a > 0$, (u_n) *tend vers* $+\infty$.

Divergence d'une suite

Exemple

Suites arithmétiques : $(u_n) = (u_0 + an)$
Si $a > 0$, (u_n) *tend vers* $+\infty$.
Si $a = 0$, (u_n) *est constante (tend vers* u_0*).*

Divergence d'une suite

Exemple

Suites arithmétiques : $(u_n) = (u_0 + an)$
Si $a > 0$, (u_n) *tend vers* $+\infty$.
Si $a = 0$, (u_n) *est constante (tend vers* u_0*).*
Si $a < 0$, (u_n) *tend vers* $-\infty$.

Opérations sur les suites convergentes.

Proposition

Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels* l_1 *et* l_2*, et soit* λ *un nombre réel. avec* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{R})$*. Alors*

$$a) \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l_1|, \qquad b) \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2,$$
$$c) \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = l_1 l_2, \quad d) \lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l_1.$$

Opérations sur les suites convergentes.

Proposition

Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels* l_1 *et* l_2, *et soit* λ *un nombre réel. avec* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. *Alors*

$$a) \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l_1|, \qquad b) \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2,$$

$$c) \lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = l_1 l_2, \quad d) \lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l_1.$$

Si de plus $l_1 \neq 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$.

Opérations sur les suites convergentes.

Proposition

Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels* l_1 *et* l_2*, et soit* λ *un nombre réel. avec* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2$ $(l_1, l_2 \in \mathbb{R})$*. Alors*

a) $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l_1|$, b) $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l_1 + l_2$,

c) $\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = l_1 l_2$, d) $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l_1$.

Si de plus $l_1 \neq 0$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l_1}$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq v_n$, *alors* $l_1 \geq l_2$.

Opérations sur les suites convergentes.

Exemple

- $u_n = n,\ v_n = -n + 1/n$: *la suite* $(u_n + v_n)$

Opérations sur les suites convergentes.

Exemple

- $u_n = n$, $v_n = -n + 1/n$: *la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers 0 ;*
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: *la suite* $(u_n + v_n)$



Opérations sur les suites convergentes.

Exemple

- $u_n = n$, $v_n = -n + 1/n$: *la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers 0 ;*
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: *la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $-\infty$ *;*
- $u_n = n$, $v_n = -n + (-1)^n$: *la suite* $(u_n + v_n)$

Opérations sur les suites convergentes.

Exemple

- $u_n = n$, $v_n = -n + 1/n$: *la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers 0 ;*
- $u_n = n$, $v_n = -n^2$: *la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $-\infty$ *;*
- $u_n = n$, $v_n = -n + (-1)^n$: *la suite* $(u_n + v_n)$ *ne converge pas.*

Opérations sur les suites convergentes.

Théorème

Si $(u_n)_n$ une suite convergente et de limite l et f est une fonction continue en l, alors la suite $(v_n)_n = (f(u_n))_n$ est convergente et admet $f(l)$ pour limite.

Opérations sur les suites convergentes.

Exemple

Exemple. *Soit* $(v_n)_n$ *la suite définie par* $v_n = \sqrt{\frac{2n^2-n+1}{3n^2+4}}$. *On pose* $u_n = \frac{2n^2-n+1}{3n^2+4}$ *et* $f(x) = \sqrt{x}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$ *et* f *est continue en* $\frac{2}{3}$ *et par suite*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Proposition

On a :

- *La limite d'un suite convergente est unique.*

Suites Convergentes

Caratéristiques

Proposition

On a :

- *La limite d'un suite convergente est unique.*
- *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition

On a :

- *La limite d'un suite convergente est unique.*
- *Toute suite convergente est bornée.*

Exemple

- *la suite définie par* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *converge vers 0 et bornée par 1.*

Proposition

On a :

- *La limite d'un suite convergente est unique.*
- *Toute suite convergente est bornée.*

Exemple

- *la suite définie par* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *converge vers 0 et bornée par 1.*
- *la suite définie par* $\left(\frac{-1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ *converge vers 0 et bornée par 1.*

Suites Convergentes

Caratéristiques

Proposition

On a :

- *La limite d'un suite convergente est unique.*
- *Toute suite convergente est bornée.*

Exemple

- *la suite définie par* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *converge vers 0 et bornée par 1.*
- *la suite définie par* $\left(\frac{-1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ *converge vers 0 et bornée par 1.*

Suites Convergentes

Caratéristiques

- Toute suite croissante majorée est convergente.

Suites Convergentes

Caratéristiques

- Toute suite croissante majorée est convergente. Sa limite est égale à sa borne supérieure.

Suites Convergentes

Caratéristiques

- Toute suite croissante majorée est convergente.
  Sa limite est égale à sa borne supérieure.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

Suites Convergentes

Caratéristiques

- Toute suite croissante majorée est convergente.
  Sa limite est égale à sa borne supérieure.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

- Toute suite croissante majorée est convergente. Sa limite est égale à sa borne supérieure.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante minorée est convergente. Sa limite est égale à sa borne inférieure.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Suites Convergentes

Caratéristiques

Exemple

les suites suivantes sont croissantes, décroissantes, minorées majorées, déduire leur limites ?

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{-1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$

Exemple

les suites suivantes sont croissantes, décroissantes, minorées majorées, déduire leur limites ?

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{-1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$

- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ *est décroissante et minorée par 0 donc convergente, sa borne inférieure est 0 d'où elle converge vers 0.*
- $\left(\frac{-1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ *croissante et majorée par 0 donc convergente,sa borne supérieure est 0 d'où elle converge vers 0.*

théorème des gendarmes

Théorème

Soient (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites de réels telles que* (u_n) *et* (w_n) *convergent vers la même limite* l, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. *alors* (v_n) *converge vers* l.

théorème des gendarmes

Exemple

Voici un exemple d'application. Soit
$$u_n = \frac{n + (-1)^n}{n+2} \; .$$

théorème des gendarmes

Exemple

Voici un exemple d'application. Soit
$u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+2}$.
Comme $(-1)^n$ *vaut* $+1$ *ou* -1, *on a l'encadrement suivant.* $\dfrac{n-1}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$. *Les deux bornes de cette double inégalité tendent vers* 1, *donc* $\lim u_n = 1$. *La comparaison vaut aussi pour les limites infinies*

Suites adjacentes

Définition

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites de réels. Elles sont dites adjacentes si*

- (u_n) *est croissante.*
- (v_n) *est décroissante.*
- $(v_n - u_n)$ *tend vers 0.*

‘

Suites adjacentes

Proposition

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Suites adjacentes

Exemple

Posons : $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

Suites adjacentes

Exemple

Posons : $u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ *et*
$v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.
La suite (u_n) *est strictement croissante car*
$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0.$
La suite (v_n) *est strictement décroissante :*
$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.
La différence $v_n - u_n$ *tend vers 0*



Suites adjacentes

Théorème

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes, alors*

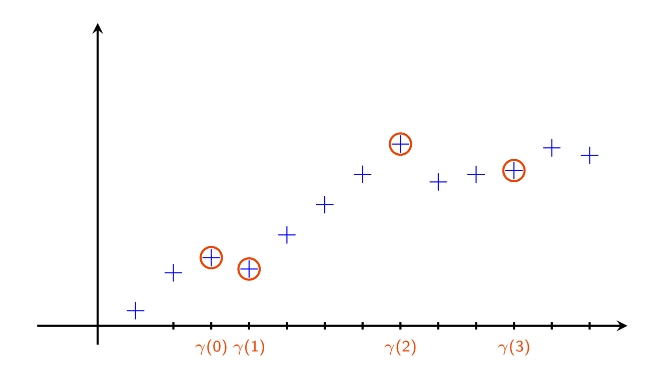
- *les deux suites sont convergentes.*
- *elles convergent vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.

Suite extraite

Définition

On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite extraite (ou sous-suite) de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il existe une application strictement croissante* $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que* $v_n = u_{\gamma(n)}$ *pour tout* n*.*

Suite extraite



Suite extraite

Exemple

Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$*sont des suites extraites de* $(u_n)_{n\geq 0}$

Suite extraite

Exemple

Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$*sont des suites extraites de* $(u_n)_{n\geq 0}$

- *Soit* $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *donnée par* $\gamma(n) = 2n$*, alors la suite extraite correspondante a pour terme général* $u_{\gamma(n)} = \frac{(-1)^{2n}}{n} = \frac{1}{n}$*, donc la suite* $(u_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante égale à* $\frac{1}{n}$.

Suite extraite

Exemple

Les suites $\left(u_{2n}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\geq 0}$sont des suites extraites de $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$

- *Soit $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\gamma(n) = 2n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\gamma(n)} = \frac{(-1)^{2n}}{n} = \frac{1}{n}$, donc la suite $\left(u_{\gamma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\frac{1}{n}$.*
- *Soit $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\gamma(n) = 3n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\gamma(n)} = \frac{(-1)^{3n}}{n} = \frac{\left((-1)^3\right)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. La suite $\left(u_{\gamma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Suite extraite

Exemple

Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$*sont des suites extraites de* $(u_n)_{n\geq 0}$

- *Soit* $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *donnée par* $\gamma(n) = 2n$*, alors la suite extraite correspondante a pour terme général* $u_{\gamma(n)} = \frac{(-1)^{2n}}{n} = \frac{1}{n}$*, donc la suite* $(u_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante égale à* $\frac{1}{n}$.
- *Soit* $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *donnée par* $\gamma(n) = 3n$*, alors la suite extraite correspondante a pour terme général* $u_{\gamma(n)} = \frac{(-1)^{3n}}{n} = \frac{\left((-1)^3\right)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$. *La suite* $(u_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc égale à* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suite extraite

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$*, alors pour toute suite extraite* $(u_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *on a* $\lim_{n\to+\infty} u_{\gamma(n)} = \ell$.

Suite extraite

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Suite extraite

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $u_n = (-1)^n$.

Suite extraite

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Suite extraite

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Si*

- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la limite* ℓ
- $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la limite* ℓ

Suite extraite

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite. Si*

- $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la limite* ℓ
- $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la limite* ℓ

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge également vers* ℓ.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.



Le théorème des segments emboités

Corollaire

Soit une suite décroissante (pour l'inclusion) de segments $([u_n, v_n])$ *de longueur tendant vers 0, c'est à dire :*

- $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$

Le théorème des segments emboités

Corollaire

Soit une suite décroissante (pour l'inclusion) de segments $([u_n, v_n])$ *de longueur tendant vers 0, c'est à dire :*

- $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$
- $v_n - u_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$

Le théorème des segments emboités

Corollaire

Soit une suite décroissante (pour l'inclusion) de segments $([u_n, v_n])$ de longueur tendant vers 0, c'est à dire :

- $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$
- $v_n - u_n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$

Alors $\bigcap_{n\geq 0}[u_n, v_n]$ *est un singleton* $\{l\}$ *et* l *est la limite des suites* u *et* v.



Suites de Cauchy

Le concept de suite de Cauchy correspond à la propriété que la distance entre deux termes de la suite devient arbitrairement petite quand ces termes sont de rang assez grand.

Suites de Cauchy

Définition

On appelle suite de Cauchy toute suite u vérifiant la propriété

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p > N, q > N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Suites de Cauchy

Proposition

- *Toute suite convergente est de Cauchy.*



Suites de Cauchy

Proposition

- *Toute suite convergente est de Cauchy.*
- *Toute suite de Cauchy est bornée*



Suites de Cauchy

Théorème (Critère de Cauchy)

Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente.

Exemple

Le critère de Cauchy est utilisé pour montrer qu'une suite (u_n) est convergente (resp divergente) dans les cas où l'on peut obtenir facilement une majoration (resp minoration) de $|u_p - u_q|$ pour n et p assez grands. C'est le cas en particulier pour certaines suites. Montrer que la suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente.

Suites de Cauchy

Exemple

- *Une suite n'est pas de Cauchy si et seulement si* $\exists\epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists(p,q) \in \mathbb{N}^2, p > N, q > N, |S_p - S_q| > \epsilon$

Suites de Cauchy

Exemple

- *Une suite n'est pas de Cauchy si et seulement si* $\exists\epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists(p,q) \in \mathbb{N}^2, p > N, q > N, |S_p - S_q| > \epsilon$
- *Pour* $p \geq n$ $S_p - S_n = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k}$



Suites de Cauchy

Exemple

- *Une suite n'est pas de Cauchy si et seulement si* $\exists\epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists(p,q) \in \mathbb{N}^2, p > N, q > N, |S_p - S_q| > \epsilon$
- *Pour* $p \geq n$ $S_p - S_n = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k}$
- *si* $p = 2n$ $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}(k = n+1...2n)$ *on obtient* $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$

Suites de Cauchy

Exemple

- *Une suite n'est pas de Cauchy si et seulement si* $\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, p > N, q > N, |S_p - S_q| > \epsilon$
- *Pour* $p \geq n$ $S_p - S_n = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k}$
- *si* $p = 2n$ $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} (k = n+1 ... 2n)$ *on obtient* $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$
- *Donc pour* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *et pour tout N entier positif il existe des entiers n et 2n supérieurs à N tels que* $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$



Suites récurrentes

Définition

On appelle suite récurrente, toute suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f\left(u_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où f est une fonction réelle définie et continue sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$ telle que $f\left(I\right) \subseteq I$ et a un nombre réel appartenant à I.

Suites récurrentes

Proposition

textitSi la suite récurrente $(u_n)_n$ est convergente, alors sa limite l vérifie la relation

$$l = f(l).$$

Exemple

Vérifiez la convergence de la suite récurrente $(u_n)_n$ définie sur $I = [0, 1]$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & 0, \\ u_{n+1} & = & \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Suites récurrentes

Proposition

textitSi la suite récurrente $(u_n)_n$ est convergente, alors sa limite l vérifie la relation

$$l = f(l).$$

Exemple

Vérifiez la convergence de la suite récurrente $(u_n)_n$ définie sur $I = [0, 1]$ par

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ u_{n+1} &= \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Suites récurrentes

Exemple

1. *Soit* $I = [0, 1]$ *fermé bornée et* f *la fonction définie par* $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ *continue sur* I.
2. *On montre facilement que* $f(I) \subseteq I$. *Ainsi* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$
3. *Montrons maintenant que la suite* $(u_n)_n$ *est croissante.*
4. *La fonction* f *est croissante et* $u_0 = 0 \leq u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *par récurrence, on a* $u_n \leq u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
5. $(u_n)_n$ *est croissante majorée, donc convergente, sa limite* l *qui appartient à* I *vérifie*